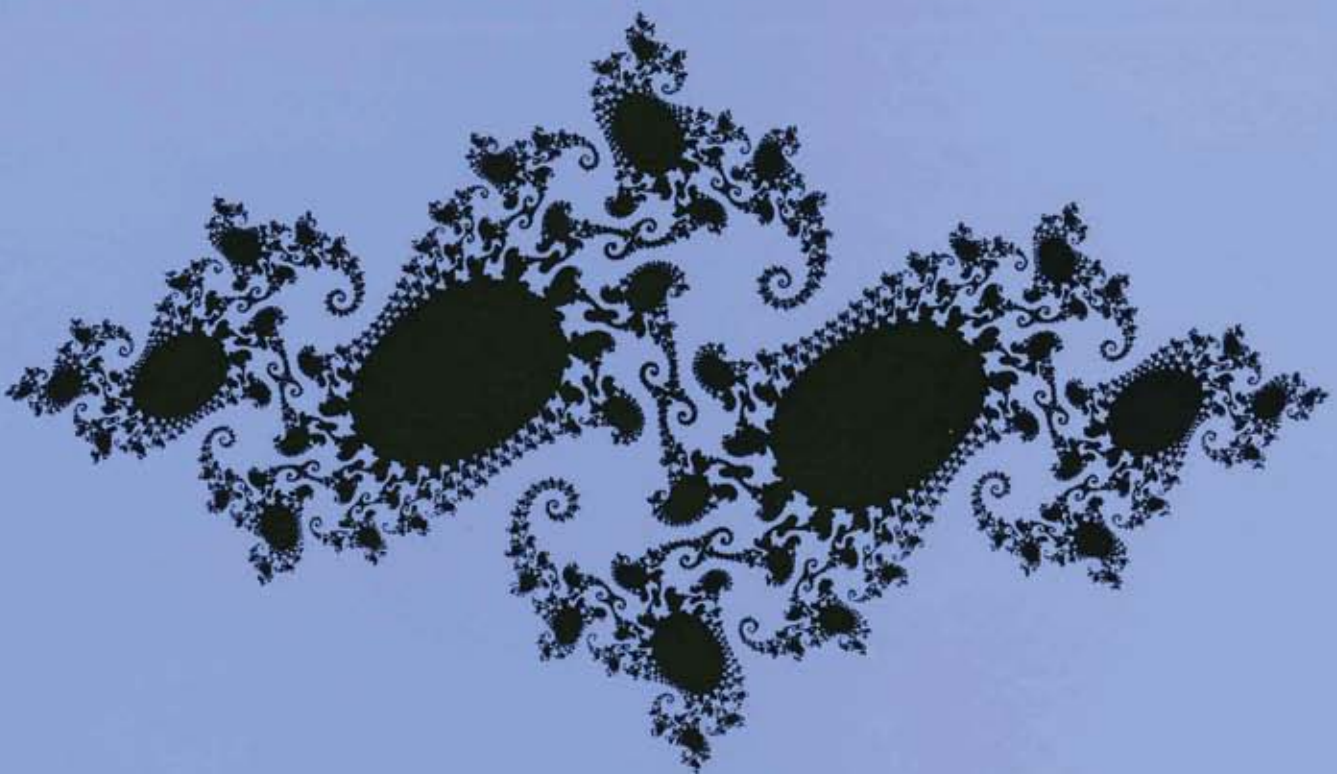


STAATSINSTITUT
FÜR SCHULPÄDAGOGIK
UND BILDUNGSFORSCHUNG
MÜNCHEN



Handreichung für den Mathematikunterricht im Gymnasium

Teil I



Anregungen
für die Gestaltung des Unterrichts
nach dem neuen Lehrplan

Vorwort

Zu Beginn des Schuljahrs 1992/93 tritt für das bayerische Gymnasium in den Jahrgangsstufen 5 mit 11 der neue Lehrplan in Kraft.

Welche Neuerungen sich dadurch für den Mathematikunterricht ergeben, ist in der vorliegenden Handreichung dargestellt; dabei sollen vor allem Anregungen und Hilfen für die Unterrichtsvorbereitung und -durchführung geboten werden. Diese sind als Vorschläge anzusehen und sind - wie bisher auch - in keiner Weise verbindlich.

Im Anschluß an diesen ersten Teil der Handreichung ist ein zweiter Teil in Vorbereitung; darin werden Aussagen zum Unterricht in den Jahrgangsstufen 12 und 13 gemacht.

Zusätzlich wird er auch weitere Beiträge zum fächerübergreifenden Unterrichten und verschiedene Angebote zum anwendungsbezogenen Mathematikunterricht enthalten.

Die vorliegende Handreichung schließt an die Reihe der bisher veröffentlichten Handreichungen an. Diese sind aufgrund des neuen Lehrplans nicht gänzlich überholt, sondern können bei entsprechender Interpretation und Schwerpunktsetzung weiterhin eine interessante Fundgrube sein.

Meinen Dank möchte ich allen Mitgliedern des Arbeitskreises aussprechen, die durch ihre sorgfältige und zuverlässige Arbeit das Erscheinen dieser Handreichung in der vorliegenden Form und zum jetzigen Zeitpunkt ermöglicht haben.

München, im Juli 1992



.....
Dr. Wilhelm Vetter

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	5
- Zum Geometrieunterricht in den Jahrgangsstufen 7 bis 10	7
1. Besondere Dreiecke	11
2. Strahlensatz und zentrische Streckung	22
3. Der Goldene Schnitt	24
- Zum Wahlpflichtgebiet KOMPLEXE ZAHLEN (Abbildungen) in der Jahrgangsstufe 11	35
1. Die Abbildung $z \mapsto z^2$	35
2. Anwendungen nichtlinearer Abbildungen von \mathbb{C} in \mathbb{C}	41
3. Über Iterationen zur Mandelbrotmenge	47
- Informationstechnische Bildung im Fach Mathematik	53
1. Informationstechnische Grundbildung (ITG) im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 8	53
2. Untersuchung einfacher numerischer Verfahren im Rahmen der Informatik (Fortführung) in der Jahrgangsstufe 10	56
3. Einsatz des Computers im Fachunterricht Sphärische Trigonometrie (Anwendungen auf die Erd- und Himmelskugel) in der Jahrgangsstufe 11	69
- Fächerübergreifendes Unterrichten im Mathematikunterricht	75
1. Allgemeine Bemerkungen	75
2. Beispiele für die Jahrgangsstufe 6	80
- Zur Geschichte der Mathematik	88
1. Beispiele für die Jahrgangsstufen 5, 6, 10, 11, 12	88
2. Zur Geschichte des Funktionsbegriffs	98
Anhang	
- Die fachlichen Neuerungen im Lehrplan auf einen Blick	106

Zum Geometrieunterricht in den Jahrgangsstufen 7 bis 10

Veränderungen gegenüber dem bisherigen Lehrplan:

Vergleicht man den Fachlehrplan Mathematik mit dem bisherigen Lehrplan hinsichtlich der für die Jahrgangsstufen 7 bis 10 vorgesehenen Inhalte aus dem Gebiet der Geometrie, so erscheinen die folgenden Veränderungen besonderer Erwähnung wert:

- Manche der in den Jahrgangsstufen 7 und 8 bislang eigenständigen Lerninhalte aus dem Gebiet der Abbildungsgeometrie ("Mehrfachspiegelungen; Begriff der geometrischen Abbildung", "Zusammensetzung von Abbildungen", "...; abbildungsgeometrische Begründungen, ...") werden nicht mehr explizit angeführt. Sie sind, in Verbindung mit Achsenspiegelungen, Punktspiegelungen, Drehungen, Verschiebungen und Kongruenzabbildungen, unter der Überschrift "Symmetrie und Kongruenz von Figuren" (Jahrgangsstufe 7, Geometrie, Lehrplanabschnitt 3) nur noch indirekt eingeschlossen und haben demzufolge weniger Gewicht als zuvor.
- Die Lerninhalte "Einführung der Begriffe: Grundsatz (Axiom), Folgesatz (Lehrsatz) und Definition", "Das geometrische Beweisverfahren; ..., Kongruenzbeweise", "Satz und Kehrsatz; notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit einer Behauptung" finden sich nicht mehr eigens in den Inhaltsspalten ausgewiesen. Gedacht ist vielmehr an eine schrittweise Hinführung zum mathematischen Beweisverfahren, die jeweils den fortlaufend behandelten Stoff als Grundlage hat und Schwerpunkte setzt gemäß der Entwicklung der Schüler und der Unterrichtssituation.
- Die Einheit "Geometrische Punktfolgen mit besonderen Eigenschaften: ..." ist aufgelöst; Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende sollen als besondere Symmetrieachsen eingeführt werden (wie auch die Mittelparallele) und dann als Dreieckstransversalen vertiefend behandelt werden.
- Der Lehrplanabschnitt 4 von Jahrgangsstufe 7, Geometrie, besteht - unter dem Oberbegriff "Dreiecke" - nicht nur aus einer Zusammenfassung von bisherigen Inhalten dieser Jahrgangsstufe, sondern er nimmt auch den Lerninhalt "Um- und Inkreis eines Dreiecks" aus Jahrgangsstufe 8 nach vorne (und ergänzt ihn noch um "Höhenschnittpunkt; Hinweis auf den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ($\rightarrow M_9$)).
- Der Lerninhalt "Das Parallelogramm" ist aus Jahrgangsstufe 7 nach Jahrgangsstufe 8 verschoben und wird so - innerhalb des Lehrplanabschnitts 1, Geometrie - zum Ausgangspunkt einer auf der Dreiecksgeometrie aufbauenden, umfangreicheren Viereckslehre.
- Vektorbegriff und Vektoraddition sollen im Zusammenhang mit der Untersuchung des Parallelogramms eingeführt werden (vorbereitet durch die Inhalte "Verschiebungspfeile, auch in Koordinatendarstellung" und "Verkettung von Verschiebungen" in Jahrgangsstufe 7). Eine Behandlung der S-Multiplikation (in Jahrgangsstufe 9) ist nur noch fakultativ; der Lerninhalt "Das Skalarprodukt zweier Vektoren" in Jahrgangsstufe 10 entfällt ersatzlos.
- Für den Beginn der Geometrie in Jahrgangsstufe 9 wird nunmehr die Reihenfolge "Strahlensatz, zentrische Streckung, Ähnlichkeit" empfohlen.

- Das bisherige Angebot von Alternativen in Jahrgangsstufe 8 ist zugunsten des Lerninhalts "Der Umfangwinkelsatz und seine Anwendung; ..." (vgl. Jahrgangsstufe 8, Geometrie, Lehrplanabschnitt 2) aufgehoben. In Jahrgangsstufe 10 entfallen die beiden früheren Alternativen "Anwendungen des Skalarprodukts" und "Goniometrische Umformungen und Gleichungen".
- Als Inhalte neu hinzugekommen sind "reguläre Vielecke" (Jahrgangsstufe 8) und "Goldener Schnitt" (Jahrgangsstufe 9).
- Die in den Jahrgangsstufen 9 und 10 am mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium geforderte Wahlpflicht besteht jetzt jeweils in einer Entscheidung zwischen Informatik und Geometrie. "Darstellende Geometrie" (Jahrgangsstufe 9) und "Kegelschnitte" (Jahrgangsstufe 10) sind hierbei als eigenständige, geschlossene Einheiten konzipiert.

Gründe für die Veränderungen:

Die aufgelisteten Veränderungen gründen auf dem in der zweiten Ebene des Lehrplans für das bayerische Gymnasium beschriebenen Profil des Faches Mathematik (KWMBI I 1990 So.-Nr. 3, S. 166/167). Zu einem großen Teil resultieren diese Veränderungen aus den Erfahrungen mit dem bisherigen Mathematiklehrplan. Sie sind aber auch Ausdruck allgemeiner Prinzipien, die für die Lehrplanarbeit mitbestimmend waren: Schülerorientierung, Stoffkürzung und fächerübergreifende Zusammenarbeit mit anderen Fächern.

In besonderem Maße gilt dies für die Einschränkung der Abbildungsgeometrie zugunsten einer noch stärker betonten Figurenlehre, wie sie in einem Kontaktbrief des ISP (Abteilung Gymnasium, Referat Mathematik/Informatik) bereits im Juni 1981 - ausführlich erläutert - nahegelegt wurde. Darüber hinaus braucht Abbildungsgeometrie, wenn sie eigenständig ertragreich und schon in den Jahrgangsstufen 7 und 8 begreifbar sein soll, mehr Unterrichtszeit als zur Verfügung steht, zumal wenn man unverzichtbar erscheinende Inhalte der Figurenlehre nicht aufgeben will. Die Figurenlehre geht stärker vom Umfeld des Schülers aus und befaßt sich mit konkreteren Objekten, was den Zugang wesentlich erleichtert und auch bedeutet, daß viele Resultate so umsetzbar sind, "daß die Schüler Beziehungen in ihrer Erfahrungswelt aus neuer Sicht wahrnehmen und verstehen" können. Sie "trägt zu einer besseren Orientierung in der Umwelt bei und weckt Freude am Entdecken geometrischer Zusammenhänge. Sie stärkt das Vermögen, sich Lagebeziehungen, Größenverhältnisse oder figurliche Anordnungen in der Ebene und im Raum vorstellen zu können." Da die "Probleme in vielfältiger Form auftreten, erfordert das selbständige Lösen ... Einfallsreichtum und Geschick. Für interessierte Schüler bietet sich immer wieder ein Anreiz, neue Wege zu erkunden und dabei Kreativität zu entwickeln." Die Figurenlehre ist gut geeignet, um "systematisches Vorgehen" aufzuzeigen und zu entwickeln; die Schüler lernen in Situationen, die sie wirklich erfassen können, "überschaubare Bereiche nach systematischen Gesichtspunkten zu gliedern, dabei strukturelle Beziehungen zu erkennen und ordnend zu erfassen".¹ Folgerichtige Gedankenführung, Herleitungen streng nach Regeln, das deduktive Schließen und der mathematische Beweis² sind mit der Figurenlehre untrennbar verbunden ("more geometrico!") und lassen sich hier besonders einleuchtend aufzeigen und einprägsam vermitteln. Nicht zuletzt bietet die Figurenlehre immer wieder günstige Gelegenheit für einen "Einblick in die Geschichte der Mathematik" und ist ein ausgezeichnete Ausgangspunkt, um

¹alle vorstehenden Zitate aus: KWMBI I 1990 So.-Nr. 3, S. 166/167

²vgl. KWMBI I 1990 So.-Nr. 3, S. 166

"einen Eindruck von der Rolle der Mathematik innerhalb der Wissenschafts- und Kulturgeschichte"³ zu geben.

Die beim Thema "Beweisen" vorgenommenen Veränderungen bedeuten nicht, daß die diesbezüglich nicht mehr ausgewiesenen Lerninhalte ersatzlos entfallen, sondern sollen bewirken, daß diese nicht in Form isolierter Unterrichtseinheiten besprochen werden. Dem Lehrer erwächst dadurch ein größerer Gestaltungsspielraum, und die Schüler können die oft als schwierig empfundene 'Materie' anhand vertrauten Stoffs, zur richtigen Zeit und in angemessenen Portionen lernen.

Stufen eines Vorgehens im erwähnten Sinne sind ersichtlich aus den Zielleisten des Fachlehrplans:

Jahrgangsstufe 7, Geometrie

- 2 Winkel an Geradenkreuzungen; Winkel bei Dreiecken und Vierecken:
... sollen die Schüler mit einschlägigen Bezeichnungen, Axiomen und Sätzen vertraut werden. Vorrangiges Ziel ... ist es, .. zu sachgerechtem Beschreiben und Begründen von Zusammenhängen hinzuführen (\rightarrow D, DS). Die Anwendung gewonnener Erkenntnisse zur Ableitung neuer Sätze und für die Berechnung unbekannter Winkel ist dazu eine wichtige Hilfe.
- 3 Symmetrie und Kongruenz von Figuren:
... Beim Zeichnen und Konstruieren, beim Entdecken, Beschreiben und Begründen geometrischer Zusammenhänge sollen die Schüler Einfallsreichtum und geistige Wendigkeit entwickeln.
- 4 Dreiecke: Transversalen, besondere Dreiecke, Konstruktionen:
... Die Untersuchung der Transversalen und die Betrachtung besonderer Dreiecke bieten gute Gelegenheit, Verständnis für die Notwendigkeit des Beweisens zu wecken und erste einfache Beweisschritte durchzuführen...

Jahrgangsstufe 8, Geometrie

- 1 Vierecke: allgemeines Viereck, besondere Vierecke, Konstruktionen:
... In diesem Abschnitt sollen verstärkt wesentliche Beweistechniken vermittelt werden. Die Schüler sollen schließlich in der Lage sein, Voraussetzung und Behauptung klar zu unterscheiden, einfache Beweise selbständig durchzuführen, Kehrsätze zu formulieren und deren Beweisbedürftigkeit einzusehen.

Für die oben beschriebene Reduzierung der Vektorrechnung in der Mittelstufe sprechen Gründe analog zu denen, die zur Einschränkung der Abbildungsgeometrie bereits genannt wurden. Ein früher Einsatz dieses doch mehr algebraisch orientierten Werkzeugs birgt die Gefahr, daß "dadurch genuin geometrische Einsichten verschleiert werden und eine wenig aufgabenträchtige theoretische Mathematik in der Mittelstufe den Schüler mit unnötigem begrifflichem Ballast belastet. Dem Einsatz eines anschaulichen Vektorbegriffs in der Physik (Pfeil-Addition) steht das nicht entgegen."⁴

An vielen Stellen des Fachlehrplans ist ersichtlich, daß Zeichnen und Konstruieren im Geometrieunterricht der Mittelstufe eine wichtige Rolle einnehmen sollen. Schon aufgrund der Argumente für die Figurenlehre sind diese mathematischen Tätigkeiten von wesentlicher Bedeutung. Neben der Freude am praktischen Tun und am Entdecken von Besonderheiten bieten sie auch eine ausgezeichnete Basis, um die Schüler zu angemessener Beschreibung und gedanklicher

³s. KWMBI I 1990 So.-Nr. 3, S. 167

⁴s. MNU 42/5 Empfehlungen zur Gestaltung von Mathematiklehrplänen, 3.2 (S. V)

Durchdringung von Sachverhalten zu führen und die Fähigkeit zur Abstraktion auszubilden.⁵ In diesem Sinne ist es sehr hilfreich, wenn - wie es im bisherigen Lehrplan bei der Achsenspiegelung bereits explizit stand - bei Konstruktionsübungen Aufgaben bevorzugt werden, "an denen der Schüler neue Zusammenhänge entdecken kann, ohne daß an deren Beweis gedacht ist".⁶

In den anschließenden Einzelbeiträgen werden einige der genannten Veränderungen ausführlicher ins Blickfeld genommen.

Der Beitrag "Besondere Dreiecke" soll zeigen, wie eine Betrachtung des gleichschenkligen und des rechtwinkligen Dreiecks am Ende von Jahrgangsstufe 7 erfolgen kann, und er soll erkennen lassen, welche Vorteile mit diesem Vorgehen verbunden sind.

Unter der Überschrift "Strahlensatz und zentrische Streckung" sind Argumente für den im Lehrplan gewählten Weg dargelegt, in Verbindung mit methodischen Hinweisen für einen dementsprechenden Aufbau.

Schließlich enthält der Beitrag "Der Goldene Schnitt" detailliertes und umfangreiches Material für die Behandlung dieses Themas im Geometrieunterricht der Jahrgangsstufe 9. Er ist angesichts der vielfältigen Aspekte des Goldenen Schnittes ausführlich gehalten und erfordert eine geeignete Auswahl.

In seiner GALOIS-Biographie "Wen die Götter lieben" schreibt Leopold Infeld:

"Evariste sah, wie der Geist der Geometrie hier so lange gefoltert wurde, bis er ein lebloses Skelett war, eine Sammlung langweiliger, bedeutungsloser Sätze, die Tag für Tag memoriert wurden. Er sah, wie dieser Unterricht es mit vollendeter Routine zustande brachte, Schönheit in Langeweile, logische Beweiskraft in Dogmatik, einen griechischen Tempel in einen Steinhaufen zu verwandeln."⁷

Der Geometrieunterricht am Gymnasium möge das Gegenteil erreichen!

⁵vgl. KWMBI I 1990 So.-Nr. 3, S. 166

⁶s. KMBI I 1977 So.-Nr. 15, S. 532

⁷Leopold Infeld, Wen die Götter lieben, Berlin 1957 (Nachdruck 1986), S. 75/76