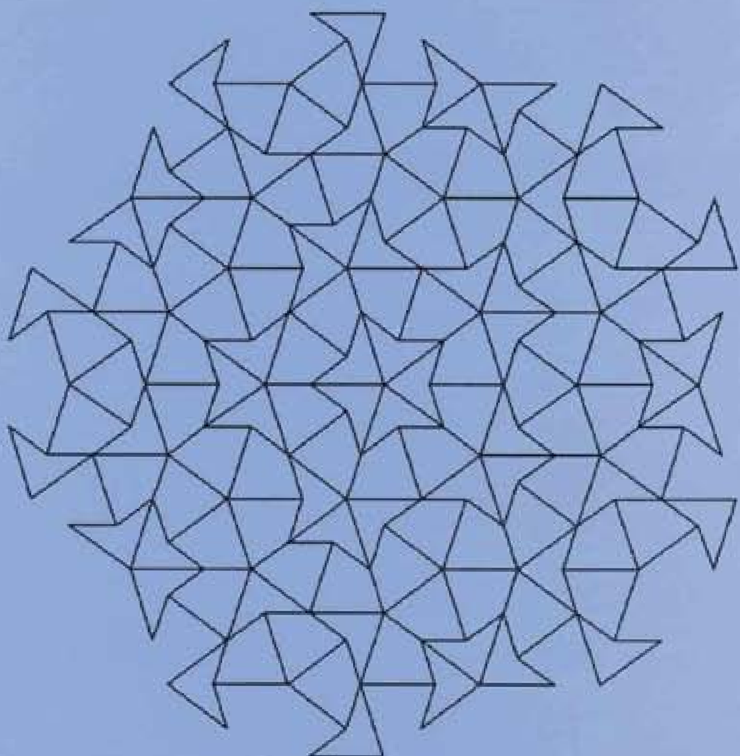
STAATSINSTITUT
FÜR SCHULPÄDAGOGIK
UND BILDUNGSFORSCHUNG
MÜNCHEN

Handreichung für den Mathematikunterricht im Gymnasium

Teil II



Anregungen
für die Gestaltung des Unterrichts
nach dem neuen Lehrplan

Vorwort

Die vorliegende Handreichung stellt den zweiten Teil einer Schrift des Staatsinstituts dar, welche zu Beginn des Schuljahres 1992/93 erschienen ist.

Das erste Kapitel befaßt sich ausschließlich mit dem Unterricht in den Jahrgangsstufen 12 und 13. Es erläutert einige mit dem neuen Lehrplan verbundene Veränderungen und zeigt Gelegenheiten auf, in den genannten Jahrgangsstufen neue Akzente zu setzen.

Das nachfolgende Kapitel enthält Angebote für einen anwendungsorientierten Unterricht für alle Jahrgangsstufen des Gymnasiums. Der Arbeitskreis hat sich besonders um Aufgaben bemüht, die keine übermäßig umfangreichen Sacherklärungen erfordern und daher im Rahmen des üblichen Unterrichts behandelt werden können. Der Begriff der Anwendungsorientierung wurde dabei bewußt weit gefaßt: Letztlich stellt wohl jeder Versuch, mit mathematischen Mitteln Strukturen in den Erscheinungen der uns umgebenden Welt zu finden, ein Anwenden von Mathematik dar. Ein Rückblick auf die Geschichte der Mathematik macht deutlich, daß gerade die Wechselwirkung zwischen Anwendung und mathematischer Theorie sehr zur Entwicklung der Mathematik insgesamt beigetragen hat. Im Unterricht sollte dies den Schülern zumindest an einigen Stellen deutlich werden.

Ergänzend seien interessierte Kolleginnen und Kollegen auch auf eine frühere Handreichung des Staatsinstituts mit dem Titel „Anwendungsbezogene Aufgaben für die Unter– und Mittelstufe" aus dem Jahr 1986 hingewiesen.

Im dritten Kapitel finden sich sehr verschiedenartige Angebote zum fächerübergreifenden und fächerverknüpfenden Unterrichten. Die Angebote dieses Kapitels versuchen deutlich zu machen, in welcher Weise die Mathematik über die Grenzen des reinen Fachunterrichts hinaus zum Bildungs– und Erziehungsauftrag des Gymnasiums beitragen kann. Daher finden sich dort auch einige Beiträge, welche – besonders in der Oberstufe – zu philosophischem Denken hinführen.

Die Angebote für anwendungsorientiertes, fächerübergreifendes oder fächerverknüpfendes Unterrichten, welche diese Handreichung enthält, sollen den herkömmlichen Unterricht in einem zeitlich angemessenen Umfang ergänzen und bereichern. Zentrale Ziele und Inhalte des Unterrichts sollen dadurch vertieft und gestützt, aber nicht verdrängt werden. Gleiches gilt auch für die Beiträge zum Einsatz des Computers.

Die vorliegende Handreichung wurde vollständig mit dem Programm TEX erstellt. Dabei handelt es sich um ein frei verfügbares Programm zum Setzen wissenschaftlicher Texte, welches im Hochschulbereich und im Verlagswesen eine weite Verbreitung gefunden hat. Das Programm und der Text der Handreichung einschließlich aller Formeln und Abbildungen können vom Staatsinstitut bezogen werden. Kollegen mit entsprechenden TEX– Kenntnissen können so die in der Handreichung angebotenen Materialien in eigener pädagogischer Verantwortung ihren Wünschen und Erfordernissen anpassen. Interessenten werden gebeten, wegen Klärung technischer Einzelheiten mit dem zuständigen Referat für Mathematik und Informatik Kontakt aufzunehmen.

Mein besonderer Dank gilt den Mitgliedern des Arbeitskreises, die durch ihre sorgfältige und zuverlässige Arbeit und durch ihre große Geduld mit den Widrigkeiten eines neuen Setzverfahrens das Erscheinen dieser Handreichung in der vorliegenden Form erst ermöglicht haben.

München, im Februar 1994

W. Findeis

Wolfgang Findeis

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zum Mathematikunterricht in der Kollegstufe – neue Akzente

Der neue Lehrplan für das bayerische Gymnasium enthält für den Mathematikunterricht in der Kollegstufe gegenüber dem bisherigen Lehrplan in fachlicher Hinsicht keine einschneidenden Veränderungen. So wurden beispielsweise nur an wenigen Stellen Lerninhalte ergänzt, in einigen Fällen im Sinne einer Straffung des Lehrplans dagegen gekürzt, ohne den bisher bestehenden fachlichen Aufbau im Kern anzutasten. Die Absicht des neuen Lehrplans, Querbezüge zu anderen Fächern verstärkt aufzuzeigen und auf fächerübergreifende Bildungs– und Erziehungsaufgaben hinzuweisen, hat aber gerade auch im Mathematikunterricht der Kollegstufe zu bemerkenswerten Akzentverschiebungen geführt. Im folgenden sollen diese Akzentverschiebungen für alle drei Gebiete, Infinitesimalrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik und Analytische Geometrie, im Grundkurs und im Leistungskurs beschrieben und an geeigneter Stelle durch praktische Beispiele, welche für den Unterricht hilfreich sein können, ergänzt werden.

1.1 Infinitesimalrechnung

Grundkurs Jahrgangsstufe 12

Der Einstieg in das Thema „Bestimmtes Integral" über den im neuen Lehrplan gewählten Weg (Lehrplanabschnitt 1) ist im Sinne einer Querverbindung zu historischen Betrachtungen sicher zweckmäßig und am Anfang dieses Themas wohl auch für die Schüler motivierender. Der Vorteil der vorgeschlagenen Verwendung von Tabellenkalkulationsprogrammen dürfte darin liegen, daß die Schüler bei der Streifenmethode (insbesondere bei verschiedenen Streifenzerlegungen) Summationen rascher durchführen und miteinander vergleichen können und so schon relativ frühzeitig zu eigenständigem Arbeiten auf diesem Gebiet hingeführt werden. Auch der neue Lehrplan läßt aber ausdrücklich die Möglichkeit zu, die Stammfunktion an den Anfang zu stellen.
Bei den Anwendungen der Integralrechnung (Lehrplanabschnitt 2) sollen nicht nur die im bisherigen Lehrplan schon genannten Beispiele aus der Physik gewählt werden. Im neuen Lehrplan sind deshalb auch Mittelwertberechnungen im Zusammenhang mit den Fächern Wirtschafts– und Rechtslehre sowie Erdkunde genannt. In der Praxis wird man hier meist die zu mittelnde Größe (beispielsweise die Temperatur im Verlauf eines Tages) näherungsweise mit einer Polynomfunktion beschreiben, so daß die anschließend erforderliche Integration von den Schülern problemlos bewältigt werden kann.
Das Kapitel Logarithmusfunktionen und Exponentialfunktionen in der neuen Fassung (Lehrplanabschnitt 3) unterscheidet sich vom Aufbau her im wesentlichen in folgenden drei Punkten von der Darstellung im bisherigen Lehrplan:

a) Der Einstieg erfolgt **im Grundkurs** nunmehr über die bereits aus der Mittelstufe bekannten Exponentialfunktionen und läßt sich im Zusammenhang mit Wachstumsproblemen motivierend für die Schüler gestalten. Anschließend wird die Ableitung der Exponentialfunktionen behandelt, und man gelangt dabei relativ rasch zur Exponentialfunktion mit der Basis e. Die bei diesem Vorgehen auftretende Schwierigkeit, nämlich der Nachweis der Konvergenz von $\frac{a^h-1}{h}$ für $h \to 0$, ist bereits in einer früheren Handreichung diskutiert worden und muß an dieser Stelle nicht nochmals erläutert werden. Gewählt wurde diese Einstiegsvariante, um bewußt einen methodischen Unterschied zwischen dem Vorgehen im Grundkurs und im Leistungskurs zu setzen. **Im Leistungskurs** nämlich beginnt das entsprechende Kapitel im neuen Lehrplan mit der Integralfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ zur unteren Grenze 1 und stellt, dem Leistungskurs angemessen, eine mathematisch anspruchsvollere Methode dar. Es sei aber darauf hingewiesen, daß auch der neue Lehrplan für den Grundkurs die beiden genannten Einstiegsmöglichkeiten zuläßt.

b) Es gibt keinen eigenständigen Lerninhalt „Ableitung der Umkehrfunktion" mehr. Im Sinne einer geschlossenen und zügigen Behandlung des Kapitels Logarithmusfunktionen und Exponentialfunktionen soll es im Grundkurs genügen, die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion als Umkehrung der e–Funktion geometrisch–anschaulich über den Zusammenhang zwischen den Tangentensteigungen in entsprechenden Graphenpunkten der beiden Funktionen zu finden. Hierbei ist ebenfalls an eine Abgrenzung gegenüber dem Vorgehen im Leistungskurs gedacht, wo der Satz von der Ableitung der Umkehrfunktion samt Beweis behandelt wird.

c) Die Beschreibung der Ziele im Lehrplanabschnitt 3 zeigt bereits, daß aufgrund der Bedeutung der Logarithmusfunktionen und Exponentialfunktionen in naturwissenschaftlichen, wirtschaftlichen und soziologischen Bereichen intensiv auf Querverbindungen zu anderen Fächern sowie auf fächerübergreifende Bildungs– und Erziehungsaufgaben zu achten ist. In einigen neueren Schulbüchern zur Infinitesimalrechnung finden sich bereits zahlreiche Anwendungen dieser Funktionen, etwa in den Gebieten Biologie, Erdkunde (z. B. Wachstumsvorgänge, oft unmittelbar mit Umweltproblematik verknüpft), Physik (z. B. radioaktiver Zerfall) oder auch Wirtschaft (z. B. stetige Verzinsung).

Grundkurs Jahrgangsstufe 13

Der neue Lehrplan enthält die Quotientenregel als eigenen Lerninhalt nicht mehr, da diese bereits in der Jahrgangsstufe 11 behandelt wurde. Man wird sich daher allenfalls auf eine knappe Wiederholung beschränken. Der dadurch entstehende Zeitgewinn soll statt dessen dafür genutzt werden, den Schülern Anwendungen der gebrochenrationalen Funktionen in Naturwissenschaft und Technik vorzustellen. Die rechte Spalte des Lehrplanabschnitts 4 nennt einige „klassische" Beispiele aus dem Gebiet der Physik, nämlich die Abbildung durch optische Linsen, die Parallelschaltung von Widerständen, die Satellitenbewegung und die Van–der–Waals–Gleichung realer Gase. Im folgenden wird ein Anwendungsbeispiel aus der Kinematik vorgestellt:

Aufgabe:
In einem kartesischen Koordinatensystem (vgl. Abb. 1.1) bewege sich ein Punkt $P(x\,|\,0)$ auf der x–Achse in positiver x–Richtung. Auf der y–Achse befinde sich ferner ein fester Punkt $Q(0\,|\,h)$. Es werden zwei Fälle betrachtet:

1. *Der Punkt P bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich im Ursprung des Koordinatensystems.*

2. *Der Punkt P bewegt sich mit konstanter Beschleunigung a. Für Ort und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ gelte $x = 0$ und $v = 0$.*

Für die Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit ω des von Q nach P gezogenen Strahls von der Zeit t wird hier ohne Herleitung angegeben:

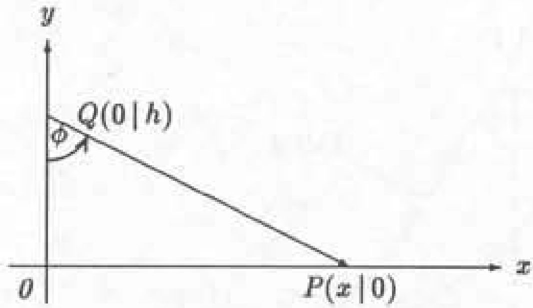


Abb. 1.1

Fall 1: $\omega(t) = \dfrac{h \cdot v}{h^2 + v^2 \cdot t^2}$ *Fall 2:* $\omega(t) = \dfrac{4h \cdot a \cdot t}{4h^2 + a^2 \cdot t^4}$

a) *Untersuchen Sie jeweils die Funktion $\omega(t)$ für $t \geq 0$ auf Monotonie und Extrema. Geben Sie auch das Verhalten für $t \to \infty$ an.*

b) *Wählen Sie speziell $h = 10$ m, $v = 4{,}0\ \frac{m}{s}$, $a = 3{,}0\ \frac{m}{s^2}$ und zeichnen Sie für beide Fälle ein t-ω-Diagramm im Intervall [0s;10s] in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. (t-Achse: 1 cm $\hat{=}$ 1,0 s; ω-Achse: 1 cm $\hat{=}$ 0,10 s^{-1})*

Lösung:

a) **Fall 1:**

Die erste Ableitung lautet: $\dot{\omega}(t) = \dfrac{-2h \cdot v^3 \cdot t}{(h^2 + v^2 \cdot t^2)^2}$

Die Funktion $\omega(t)$ ist für $t \geq 0$ streng monoton abnehmend. Bei $t = 0$ liegt ein lokales und globales Maximum vor. Sein Wert beträgt $\omega(0) = \dfrac{v}{h}$.

Ferner gilt: $\omega(t) \to 0$ für $t \to \infty$

Fall 2:

Die erste Ableitung lautet: $\dot{\omega}(t) = \dfrac{4ha \cdot (4h^2 - 3a^2t^4)}{(4h^2 + a^2t^4)^2}$

$$\dot{\omega}(t_0) = 0 \iff 4h^2 - 3a^2t_0^4 = 0 \iff t_0 = \sqrt[4]{\frac{4h^2}{3a^2}}.$$

Die Funktion $\omega(t)$ ist streng monoton zunehmend für $0 \leq t \leq t_0$ und streng monoton abnehmend für $t \geq t_0$. Es liegt also bei $t = t_0$ ein relatives Maximum vor. Für dessen Wert erhält man nach einiger Rechnung: $\omega(t_0) = \sqrt[4]{\dfrac{27}{64}} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{h}} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{h}}$

Ferner gilt auch hier: $\omega(t) \to 0$ für $t \to \infty$

b) Abb. 1.2 zeigt die gewünschte Graphik.

Eine praktische Anwendung dieser Aufgabe könnte etwa in der Nachführung einer Kamera bestehen, die sich an einem festen Ort befindet und ein Objekt beobachtet, das sich längs einer Geraden bewegt.

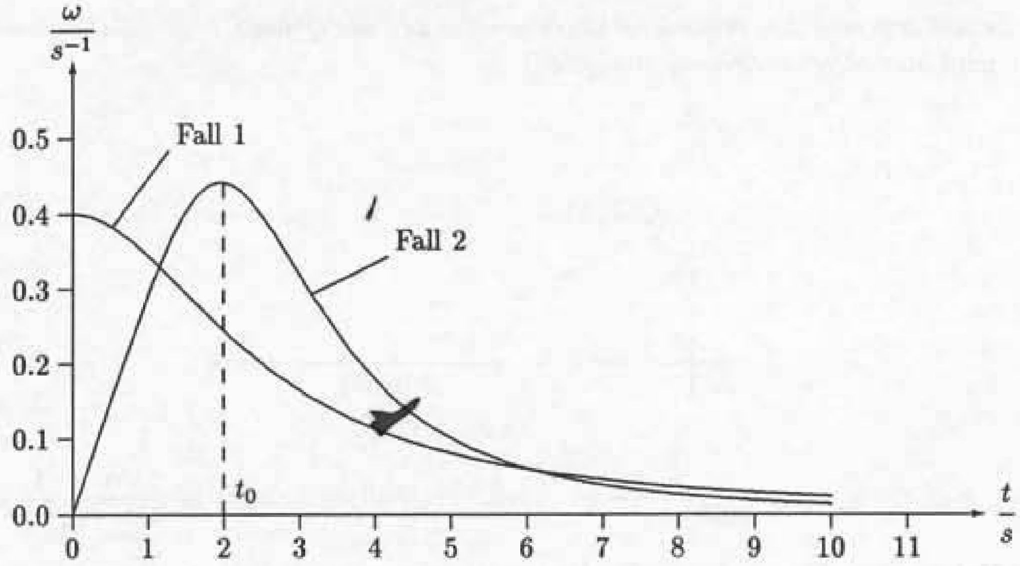


Abb. 1.2

Leistungskurs Jahrgangsstufe 12

Für den im neuen Lehrplan gewählten Einstieg in die Infinitesimalrechnung über das Thema „Meßbarkeit von Flächen, Berechnung von Flächeninhalten, Begriff des bestimmten Integrals" (Lehrplanabschnitt 1) sprechen prinzipiell die gleichen Argumente wie für das Vorgehen im Grundkurs. Im Zentrum steht dabei auch hier das Bestreben, Querverbindungen zur historischen Entwicklung in den Unterricht mit einzubauen. Eine gewisse Abgrenzung gegenüber dem Grundkurslehrplan bzw. eine geringfügige Neuerung gegenüber dem bisherigen Leistungskurslehrplan besteht darin, daß die Schüler mit dem Problem der Meßbarkeit von Flächen konfrontiert werden sollen, wobei natürlich nicht an eine ausführliche Behandlung der Theorie der Meßbarkeit gedacht ist.
In der Unterrichtspraxis läßt sich zur Verdeutlichung dieser Problematik z. B. die Dirichlet-Funktion recht gut heranziehen:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Die Schüler werden bereits beim Versuch, den „Graphen" dieser Funktion zu zeichnen, bemerken, daß die Zuordnung eines Flächeninhalts, etwa über dem Intervall [0;1], Schwierigkeiten bereitet. Das bestimmte Integral hilft nicht weiter: Die Dirichlet-Funktion ist im Einheitsintervall [0;1] nicht im Riemannschen Sinne integrierbar. Wählt man nämlich eine beliebige Zerlegung des Einheitsintervalls, so ist der Wert der Untersumme 0, der Wert der Obersumme aber 1. Dies liegt daran, daß es in jedem Teilintervall einer Zerlegung mindestens eine irrationale und eine rationale Zahl gibt. Das bestimmte Integral $\int_0^1 D(x)dx$ existiert also nicht. Die Behandlung dieser Problematik im Unterricht bietet Gelegenheit, einen mathematikgeschichtlichen Blick auf die Situation der Infinitesimalrechnung im 19. Jahrhundert zu werfen: Bereits das 18. Jahrhundert brachte bekanntlich eine stürmische Entwicklung der Infinitesimalrechnung[1], wobei besonders Leonhard

[1]In diesem Zusammenhang ist für die Schüler vielleicht der Hinweis von Interesse, daß zu dieser Zeit ein ganz anderer Formalismus gebräuchlich war. Hinter diesem verbarg sich eine mit den mathematischen Mitteln der Zeit nicht genau zu formulierende Theorie „unendlich kleiner" oder „infinitesimaler" Zahlen, die diesem Teilgebiet der Mathematik auch seinen deutschen Namen gab. Seit den Arbeiten von Robinson [63] Anfang der 60er-Jahre gibt es die sog. Non-Standard-Analysis, welche als eine nachträgliche Formalisierung der ursprünglichen Vorstellungen über die „unendlich kleinen Zahlen" angesehen werden kann. Eine knappe Zusammenstellung der Theorie findet