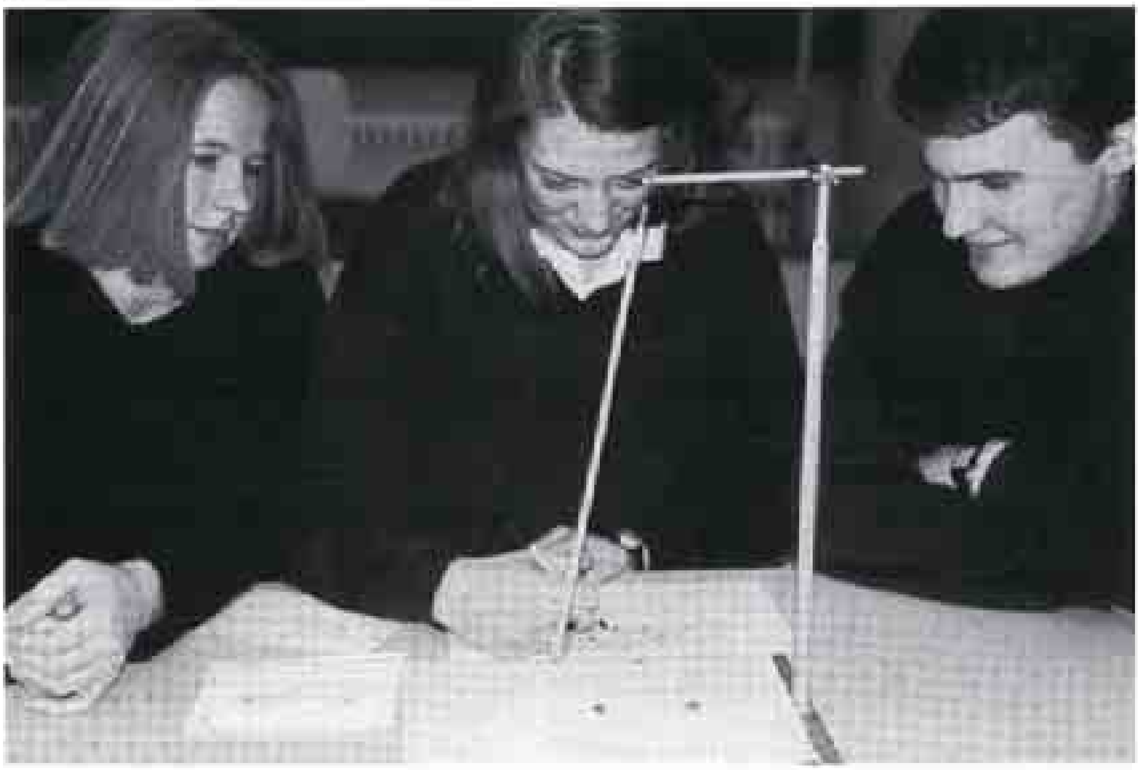
STAATSINSTITUT
FÜR SCHULPÄDAGOGIK
UND BILDUNGSFORSCHUNG
MÜNCHEN

ISB

Handreichung
für den Mathematik- und Physikunterricht
im Gymnasium



Fraktale Geometrie und deterministisches Chaos

Vorwort

Forschungsergebnisse aus der nichtlinearen Dynamik und aus der fraktalen Geometrie sind in der Öffentlichkeit vor allem durch ästhetisch faszinierende Bilder bekannt geworden. Das breite Interesse und die starke Resonanz begründen sich auch in den Erwartungen, die in diese Forschungsgebiete hinsichtlich einer Veränderung unseres Denkens und unseres Weltbilds gesetzt werden.

Gemäß Beschluss des Bayerischen Landtags vom 14.04.94 wurde die Staatsregierung gebeten, den Fachlehrern für Mathematik und Physik an den Gymnasien Materialien zur sinnvollen Einbeziehung von Chaosforschung und Fraktalgeometrie in den Unterricht an die Hand zu geben.
Die daraufhin am Staatsinstitut in Zusammenarbeit der Referate Mathematik/Informatik und Physik entwickelte Handreichung hat zum Ziel,

- die Entwicklung und die Forschungsergebnisse der nichtlinearen Dynamik und der fraktalen Geometrie in den grundlegenden Ergebnissen schülergerecht darzustellen,

- pädagogisch-didaktisch erprobte Unterrichtssequenzen für den Mathematik- und Physikunterricht vorzuschlagen,

- Beispiele für Anwendungen aufzuzeigen, in denen die Ergebnisse der Chaosforschung wichtige Voraussetzungen zur Lösung wissenschaftlicher, technischer, wirtschaftlicher und gesellschaftlicher Fragen sind.

Den Einstieg bilden Beiträge namhafter Wissenschaftler, in denen die Bedeutung der fraktalen Geometrie und der nichtlinearen Dynamik aus der Sicht des jeweiligen Autors dargestellt wird.
Kapitel 2 *Stationen auf dem Weg zur nichtlinearen Dynamik und Fraktalgeometrie* gibt einen Überblick über fachliche Grundlagen des Themas, während die Kapitel 3 *Mathematik* und 4 *Physik* tiefergehende fachliche Erläuterungen zu ausgewählten Themen und zu deren Umsetzung im Unterricht enthalten.
Der Mathematikteil bietet Beiträge zu fast allen Jahrgangsstufen an: Papierfaltfolgen und Drachenkurven können bereits in der Unterstufe behandelt werden. In Jahrgangsstufe 8 sind erste Betrachtungen zur Iteration möglich, die dann in Jahrgangsstufe 9 ergänzt werden können. Die Kapitel zur 'Fraktalen Geometrie mit KOCH-Kurven' und zu 'Iterierten Funktionensystemen' bauen teilweise auf Wissen der Jahrgangsstufe 10 auf, können aber auszugsweise auch früher behandelt werden. In Jahrgangsstufe 11 bietet sich ein Ausblick auf Spiralen, 'verrückte Funktionen', u. ä. an, was in Abschnitt 3.6. ausgeführt wird. Im Beitrag 'Iterationen in der komplexen Ebene' sind Grundlagen für Facharbeitsthemen zu Julia- und Mandelbrotmengen dargestellt.
Im Sinne fächerübergreifender Zusammenarbeit folgen Exkurse in die Biologie und Chemie mit den Themen 'L-Systeme' und 'Chemische Oszillationen'.
Konkrete Lehrplanbezüge und Umsetzungsmöglichkeiten für die Inhalte des Kapitels 4 *Physik* sind im Abschnitt 4.1 ausführlich dargestellt.

Fraktale Geometrie und nichtlineare Dynamik sind Gebiete aktueller Forschung – eine Handreichung dieser Form kann nur Anregungen und Einblicke vermitteln, zahlreiche Teilgebiete mussten ausgespart werden.
Naturgemäß können sich viele Beiträge nicht auf konkrete Lehrplaninhalte beziehen. Daher muss der Angebotscharakter dieser Handreichung betont werden: Verschiedene Themen können als Ergänzung den Unterricht bereichern, eine Vertiefung ist in Wahl- und Pluskursen möglich.

München, 15. März 1997

StRin Marion Kelly
Referat Mathematik/Informatik

StD Roland Reger
Referat Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zur Bedeutung der fraktalen Geometrie und der nichtlinearen Dynamik

In den folgenden Beiträgen legen namhafte Wissenschaftler dar, warum die nichtlineare Dynamik und die fraktale Geometrie gerade für junge Menschen interessant sein können und welche Bedeutung diesen Bereichen für die Zukunft zuzumessen ist. An Beispielen aus ihrem Forschungs- und Tätigkeitsbereich zeigen sie auf, inwieweit die Ergebnisse der 'Chaosforschung' wichtige Voraussetzungen zur Lösung wissenschaftlicher, technischer, wirtschaftlicher und gesellschaftlicher Fragen liefern und liefern werden.

1.1 Merkmale der nichtlinearen Dynamik

Prof. Dr. Dr. h.c. Werner Martienssen
Physikalisches Institut der Johann Wolfgang Goethe Universität, Frankfurt/Main
Arbeitsgebiet: Quantenphysik
Robert-Mayer-Straße 2-4
60325 Frankfurt am Main

Auf dem Gebiet der nichtlinearen Dynamik hat sich in den vergangenen Jahren eine stürmische Entwicklung vollzogen, die in vielen Teilbereichen der Naturwissenschaften zu einer Veränderung des wissenschaftlichen Weltbilds geführt und auch die Methoden zur Beschreibung von Naturvorgängen beträchtlich erweitert hat. Dieser wissenschaftlichen Weiterentwicklung, die mittlerweile zahlreiche Anwendungen weit über die speziellen Fachwissenschaften hinaus gefunden hat, darf man den 'Zutritt' zu den Schulen, speziell den Gymnasien, nicht verwehren.

Die nichtlineare Dynamik ist ein Teilgebiet der Physik, das sich nicht die Aufgabe gestellt hat, die Eigenschaften und das Verhalten bestimmter Objekte wie etwa fester Körper, Fixsterne oder Atomkerne zu erschließen. Es nimmt vielmehr Verhaltensweisen einer Vielfalt von Objekten der unbelebten wie auch der belebten Welt gleichzeitig in den Blick, nämlich die Gesamtheit aller nichtlinearen Systeme. Es sollen die Besonderheiten der Bewegungen und der Entwicklungen dieser Systeme im Gegensatz zu denen linearer Systeme herausgearbeitet werden.

Im Unterschied zu den in der bisherigen Schulphysik vornehmlich behandelten Themen aus der linearen Dynamik, wie klassische Elektrodynamik, laminare Strömungen, harmonischer Oszillator und Statik fester Körper, handelt es sich bei den nichtlinearen Systemen sehr oft um Objekte und Vorgänge aus der direkten Erfahrungswelt der Schüler. Die Frequenz eines tropfenden Wasserhahns, die Frage der Vorhersagbarkeit des Wettergeschehens, Stauentwicklungen im Straßenverkehr, die Populationsdynamik von Räuber-Beute-Systemen, die Ausbreitung von Waldbränden, der kritische Böschungswinkel eines Sandhaufens und auch die Dynamik von Gruppen sozial und ökonomisch interagierender Individuen sind interessante Beispiele für mögliche Unterrichtsthemen.

Als ein wesentliches Charakteristikum solcher nichtlinearer Systeme gilt, dass instabile und auf den ersten Blick scheinbar regellose, chaotische Bewegungen auftreten können (daher oft auch die Bezeichnung 'Chaos-Physik'). Mit Hilfe der mathematischen Analyse nichtlinearer Gleichungen einerseits und mit Hilfe gezielter Experimente und auch leistungsfähiger Computer andererseits ist es gelungen, universelle Prinzipien herauszuarbeiten, die hinter den chaotischen Bewegungen und Prozessen stecken. Es stellt sich heraus, dass den scheinbar chaotischen Bewegungsabläufen deterministische physikalische Gesetze zugrunde liegen können – man spricht in solchen Fällen von 'deterministischem Chaos'. Auch einfache deterministische Systeme sind in der Lage, ohne eine stochastische Anregung von außen, selbstorganisiert, in die chaotische Phase einzutreten – es müssen nur Ursache und Wirkung nichtlinear miteinander verknüpft sein.

Bei genauerer Betrachtung nichtlinearer Systeme geht es unter anderem um die Frage, wie präzise man die zukünftige Entwicklung eines Systems vorhersagen kann, wenn man seinen augenblicklichen Zustand nur mit begrenzter Genauigkeit kennt. Eine grundlegende Erkenntnis der nichtlinearen Dynamik besteht hier in der Tatsache, dass sich nichtlineare Systeme in der Phase des deterministischen Chaos nur für begrenzte Zeitintervalle vorhersagen lassen, bei längeren Vorhersagezeiten muss mit sehr großen Vorhersagefehlern gerechnet werden. Diese begrenzte Vorhersagbarkeit beruht darauf, dass bei solchen Systemen eng benachbarte Anfangszustände in der Zukunft zu ganz unterschiedlichen Entwicklungen führen können. Man spricht von einer sensiblen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen oder kurz vom 'Schmetterlingseffekt'.

Diese sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen führt dazu – wie bereits MAXWELL im letzten Jahrhundert erkannt hat –, dass die früher als unmittelbar einsichtig empfundene Erweiterung des Kausalitäts-Prinzips zu der Aussage: „Ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen" nicht mehr gültig ist. Wohl aber gilt die für alle deterministischen Systeme gültige strenge Formulierung: „Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkung". Würde es also gelingen, zwei identisch aufgebaute Systeme in exakt gleichen Anfangsbedingungen zu starten, so würden sie sich in aller Zukunft auch identisch entwickeln, vorausgesetzt es wirken keine äußeren Störungen auf das System ein. Aber natürlich ist es in der Praxis nicht möglich, im mathematischen Sinne exakt gleiche Anfangsbedingungen zu realisieren; in der Praxis laufen deshalb zwei so präparierte Systeme nach Ablauf einer endlichen Vorhersagezeit mit Sicherheit auseinander. Die große Komplexität der möglichen Bewegungszustände in der Phase des deterministischen Chaos lässt eine quantitative Beschreibung der Systeme zunächst etwas hoffnungslos erscheinen. Tatsächlich unterliegen chaotische Bewegungen jedoch universellen Gesetzmäßigkeiten, die begrifflich genau gefasst und dann auf eine Vielzahl physikalischer und nicht-physikalischer Systeme angewandt werden können.

Ein interessantes Merkmal des Gebiets der nichtlinearen Dynamik ist die Tatsache, dass grundlegende Phänomene an einfachen Repräsentanten nichtlinearer Systeme beobachtet werden können, die auf schülergemäßem Niveau und mit einem dem Schulunterricht angemessenen Aufwand dargestellt werden können. Die Auswertung solcher Experimente auf leistungsfähigen Personal-Computern kommt dem Interesse der heutigen Schülergeneration und ihrem Perzeptionsverhalten auf natürliche Weise entgegen.

Angeregt durch eine Vielzahl populärwissenschaftlicher Beiträge in Zeitschriften, Filmen und im Fernsehen, sowie auch durch künstlerische Interpretationen von Grundgedanken der nichtlinearen Dynamik sind vor allem junge Menschen neugierig geworden auf das, was sich hinter den Schlagworten 'Chaos', 'Fraktal', 'Selbstorganisation' und 'Strukturbildung' verbirgt. Es ist eine der wichtigsten Aufgaben der Schule, entscheidende, das zukünftige Denken prägende Veränderungen in Wissenschaft und Technik kontinuierlich in den schulischen Bildungsprozess einzubinden. Die richtige curriculare Einbettung der nichtlinearen Dynamik in den physikalischen Unterricht an Schulen halte ich für einen ganz wichtigen Schritt in der Entwicklung und Bildung eines angemessenen Naturverständnisses bei der jetzt heranwachsenden Generation künftiger Verantwortungsträger in Wirtschaft, Politik und Gesellschaft.

In diesem Sinne begrüße ich die Initiative 'Chaosforschung und Fraktalgeometrie im Mathematik- und Physikunterricht des Gymnasiums' auf das lebhafteste.

1.2 Nichtlineare Prozesse in der menschlichen Gesellschaft

Prof. Dr. Wolfgang Weidlich
Institut für Theoretische Physik
Universität Stuttgart
Arbeitsgebiet: Soziodynamik
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart

Wir alle sind es gewohnt, dass einfache Zusammenhänge häufig schon durch eine lineare Beschreibung erfasst werden können. So wird z. B. oft angenommen, dass Wirkungen proportional zu den Ursachen sind. Sprüche wie „viel hilft viel", oder „von nichts kommt nichts" entsprechen diesem linearen Denken. Je komplexer aber die Systeme unserer Wirklichkeit sind, desto häufiger kommt es vor, dass Wirkungen viel komplizierter mit Ursachen zusammenhängen.

Phänomene wie Selbstverstärkung, Sättigung, Kontraproduktivität, zyklische Kopplung zwischen Ursachen und Wirkungen, Instabilitäten und Phasenübergänge zwischen global verschiedenen dynamischen Verhaltensweisen einschließlich der Entwicklung von chaotischen Bewegungsformen treten insbesondere in komplexen Systemen auf und können nur mit den Mitteln der nichtlinearen Dynamik adäquat erfasst werden.

Zum Glück gibt es andererseits verblüffend einfache mathematische Modelle wie z. B. das logistische Modell, woran sich die Auswirkung von Nichtlinearität eindrucksvoll und verständlich schon für Schüler demonstrieren lässt.

Aber auch die interdisziplinäre Tragweite der Begriffsbildungen der nichtlinearen Dynamik sollte schon in der Schule angesprochen werden: So konnten neuerdings auch nichtlineare Prozesse in der menschlichen Gesellschaft mit Hilfe einer geeigneten Modellierungsstrategie quantitativ beschrieben werden. In solchen Modellen der 'synergetischen Soziodynamik' werden materielle Prozesse mit dem Entscheidungsverhalten von Menschen gekoppelt, und es wird die daraus resultierende integrierte Dynamik abgeleitet.

Einige Phänomene, die man mit solchen Modellen besser verstehen kann, seien genannt:

1. Die politische Meinungsbildung auf der Makroebene der Gesellschaft ist ein typischer nichtlinearer Prozess. Er beinhaltet u. a. politische Phasenübergänge zwischen demokratischen und totalitären Gesellschaftsstrukturen. Welche Phasenübergänge sind erwünscht und welche gefährlich? Sind sie steuerbar oder einfach schicksalhaft hinzunehmen?

2. Die Migration wechselwirkender Populationen (z. B. verschiedener kultureller Herkunft) kann zur homogenen Durchmischung oder aber zur Ghettobildung führen. Nur nichtlineare Migrationsmodelle (welche übrigens auch chaotische Lösungen haben können) können diesen für jede Gesellschaft essentiellen strukturellen Übergang erfassen.

3. Die Verkehrsdynamik vom gleichmäßig dahinfließenden bis zum ermüdenden 'stop and go'-Verkehr lässt sich ebenfalls durch relativ einfache nichtlineare Gleichungen beschreiben und verstehen. Sie werden derzeit benutzt, um Strategien auszuarbeiten, welche das Verkehrsgeschehen optimieren sollen.

Es zeigt sich an diesen Beispielen, die leicht durch weitere aus ganz anderen Gebieten ergänzt werden könnten, dass das Gebiet der nichtlinearen Dynamik einerseits große Tragweite besitzt, andererseits aber in wesentlichen Grundzügen und Grundauswirkungen den Schülern durchaus verständlich gemacht werden kann.

1.3 Faszination Chaosforschung

Prof. Dr. Joseph Egger
Meteorologisches Institut
Universität München
Arbeitsgebiet: Theoretische Meteorologie
Theresienstr. 37
80333 München

Kaum etwas ist so erfrischend wie die Erlebnisse junger Menschen, die sich ihre ersten Wege in die aufregende Gedankenwelt der Naturwissenschaft bahnen. Hierzu ist es allerdings wichtig, dass ihnen die Naturwissenschaft nicht als fertiges Gebäude dargestellt wird, das es nur noch zu bewundern und mit Fleiß einzuverleiben gilt, sondern als aufregendes Neuland, das jede Generation jenseits der bisherigen Erkenntnisschwelle für sich neu entdecken kann.

Das Gebiet der nichtlinearen Dynamik oder Chaosforschung ist vorzüglich geeignet, dieses Erlebnis zu vermitteln. In den letzten wenigen Jahrzehnten hat sich die Chaosforschung explosionsartig entwickelt und immer wieder neue, überraschende Ergebnisse gebracht. An vielen Gymnasien ist es bei der Durchführung von Studientagen in der Jahrgangsstufe 11 mit Unterstützung von Hochschullehrern überzeugend gelungen, die Freude an der Entdeckung der vielseitigen Aspekte dieses Forschungsgebietes lebendig darzustellen. Die behandelten Themen reichen von den grundlegenden Stabilitätstheorien des Mathematikers POINCARÉ, den ersten bahnbrechenden Untersuchungen des Chaos in Systemen mit wenigen Freiheitsgraden durch den Meteorologen LORENZ, bis hin zu den faszinierenden Fraktalberechnungen von MANDELBROT und den vielseitigen Anwendungen in der Medizin, der Musik und den Sprachwissenschaften. Natürlich können Schüler dieser Altersstufe noch nicht alle mathematischen Werkzeuge der nichtlinearen Dynamik und Chaostheorie beherrschen, es ist aber sinnvoll, dass sie bereits frühzeitig mit der faszinierenden Vielfalt dieser Erscheinungen vertraut gemacht werden und der Appetit dadurch geweckt wird, die aufgezeigten Phänomene später näher zu erforschen.

Dass aller Wandel in der Physik auf nichtlineare Wechselwirkungen zurückzuführen ist, ist eine Binsenweisheit. Viele Gleichungen der Physik sind lediglich Näherungen, die in erster Linie dazu dienen, die Objekte, mit denen man es in der Physik zu tun hat, zu definieren. Nichttriviale Abläufe in physikalischen Systemen werden durchweg durch die nichtlinearen Terme in den Gleichungen beschrieben. Dennoch wird in dem traditionellen Lehrstoff der Physik den linearen Systemen sehr viel Platz eingeräumt – vermutlich, weil sich lineare Systeme, im Gegensatz zu nichtlinearen Systemen, analytisch elegant behandeln lassen. Die 'Musik' liegt aber gerade im Nichtlinearen. Die vielfältigen Kompositionen dieser Musik sind in dieser Handreichung in erfrischender Fülle angeklungen.

1.4 Fractals in the Classroom

Prof. Dr. Peter Hilton
Department of Mathematics
State University New York
Arbeitsgebiet: algebraische Topologie, homologische Algebra

Prof. Dr. Jean Pedersen
Department of Mathematics
University of Santa Clara
Arbeitsgebiet: Geometrie und Didaktik

We do believe that the study of fractals can contribute to the revitalisation of the study of geometry in our schools; and we have no doubt that this is an important, indeed urgent task of mathematical education. However, we have two serious concerns about the introduction of fractals into the curriculum; we will briefly state the first, which involves other aspects of geometry, and then focus more specifically on the second, which involves how we believe fractals should be